

Lents hologràfiques. Aplicació a un sistema de detecció d'imatges exclusivament difractiu

Guillermo Romera, Pablo Fernández-Hidalgo, *

Arturo Carnicer, Ignaci Juvells i Santiago Vallmitjana †

Laboratori d'Òptica. Departament de Física Aplicada i Electrònica. UB

Teoria escalar de la difracció

La teoria general del camp electromagnètic marca l'entorn adequat per a la formulació i interpretació de fenòmens on intervé la llum. Aquesta teoria admet una considerable simplificació quan es descriuen situacions en les quals es pot negligir el caràcter vectorial dels camps. D'entre aquestes, destaca la difracció, sempre que l'observació es realitzi a distàncies molt més grans que la longitud d'ona de la llum que es faci servir. La teoria escalar prediu que la distribució d'intensitats que enregistraria un detector, quan la distància entre aquest i l'obertura difractant fos *prou gran* (condicions de difracció de Fraunhofer), és proporcional al mòdul al quadrat de la transformada de Fourier de l'objecte (figura 1).

L'obstrucció que provoca la difracció pot ser descrita mitjançant una funció de dues variables $t(x, y)$. Si aquest objecte $t(x, y)$ és il·luminat amb una ona plana i coherent de longitud d'ona λ , la distribució d'intensitats a una distància z de l'objecte vindrà donada per l'equació següent:

$$I\left(\frac{x'}{\lambda z}, \frac{y'}{\lambda z}\right) \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \exp\left(-\frac{2\pi i}{\lambda z} (xx' + yy')\right) dx dy \right|^2 = |TF_{\lambda z}[t(x, y)]|^2. \quad (1)$$

Aquest és un resultat d'una gran utilitat, ja que indica la manera de realitzar físicament una operació matemàtica de gran importància pràctica com és la transformació de Fourier (TF), ja que la TF dona la informació de la descomposició de la funció en harmònics de freqüències $x'/\lambda z$ i $y'/\lambda z$ (noteu, però, que les freqüències al pla de la difracció vénen escalades segons un factor λz). A partir d'aquest resultat, es desenvolupa tota una branca de l'òptica que es denomina *Processament òptic de la informació*.

* Guillermo Romera i Pablo Fernández-Hidalgo són alumnes de 5è curs de la Llicenciatura de Física a la Universitat de Barcelona.

† Arturo Carnicer, Ignaci Juvells i Santiago Vallmitjana són professors d'Òptica a la Universitat de Barcelona.

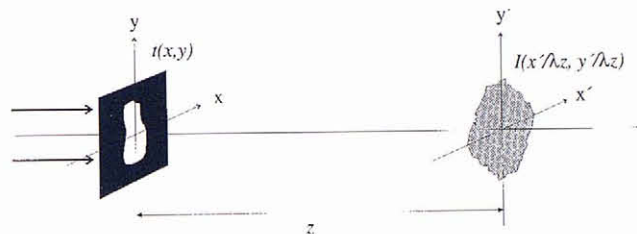


Figura 1: Ona difractant-se en passar per una obstrucció. Difracció de Fraunhofer

En l'anàlisi que estem fent hi ha un punt que cal aclarir. El rang de validesa de la fórmula anterior no queda ben establert ja que el concepte distància z gran no sembla prou precís. Un estudi més detallat indica que, per a obertures de l'ordre dels pocs centímetres i fent servir il·luminació en el visible ($\lambda \approx 10^{-7}$ m), la distància requerida per tal que la fórmula anterior descrigui els fenòmens amb suficient aproximació supera el quilòmetre i mig (!). Obertures de l'ordre dels centímetres no han de semblar pas grans, ja que els dispositius optoelectrònics que es fan servir en el processament d'informació són d'aquesta dimensió.

A la vista d'això, semblaria que les connotacions pràctiques del resultat descrit a l'equació (1) són limitades, ja que distàncies d'observació tan grans no són possibles. No obstant, treballant a distàncies d'observació de l'ordre dels centímetres (condicions de difracció de Fresnel) i fent servir lents, també és possible recuperar el resultat anterior: seguint l'esquema mostrat a la figura 2, si un objecte és il·luminat coherentment, en el pla focal de la lent recuperem unes condicions equivalents a les de la difracció de Fraunhofer. L'única diferència és que ara el factor d'escala de la TF és $\lambda f'$:

$$I\left(\frac{x'}{\lambda f'}, \frac{y'}{\lambda f'}\right) \propto |TF_{\lambda f'}[t(x, y)]|^2. \quad (2)$$

Una justificació *a priori* d'aquest fet és que la imatge geomètrica de l'objecte situat a l'infinít es troba en el

pla focal imatge de la lent. Per tant, la distància z requerida per tenir condicions de difracció de Fraunhofer a distància finita queda reduïda a la distància focal f' , que és de l'ordre dels centímetres. El dispositiu experimental que hem descrit rep el nom de *difractòmetre*. El lector interessat en aquest tema pot trobar una argumentació rigorosa dels resultats que hem fet servir en aquesta secció a (Goodman, 1968).

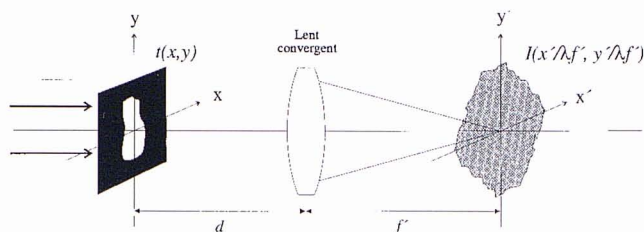


Figura 2: Sistema difractor per obtenir condicions de Fraunhofer a distància finita

Lents hologràfiques

A la secció anterior, hem vist que una lent es comporta de tal manera que permet apropar un pla d'observació situat a l'infinit fins a la distància focal de la lent. És a dir, transforma una ona plana incident (convergent a l'infinit) en una ona esfèrica convergent cap al focus de la lent. Aquest mateix comportament es pot aconseguir amb una lent hologràfica, és a dir, amb una lent que no es fonamenta en el fenomen de la refracció de la llum sinó en el de la difracció. En realitat una lent hologràfica no és res més que un holograma d'una ona esfèrica, és a dir, un registre fotogràfic de les interferències entre l'ona esfèrica i una ona plana de referència.

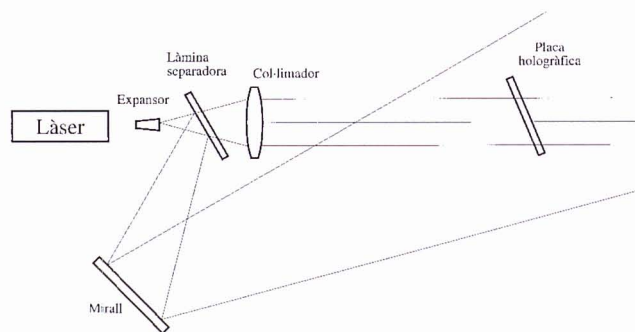


Figura 3: Fabricació d'una lent hologràfica

Per construir la lent cal fer interferir una ona plana de referència, inclinada un angle θ respecte de l'eix òptic, amb una ona esfèrica, el focus puntual de la qual es troba a distància f' , sobre una placa hologràfica (pel·lícula fotogràfica d'alta resolució), segons que s'indica

a la figura 3. A continuació la placa es revela i s'obté l'holograma. Per reconstruir l'ona esfèrica cal il·luminar l'holograma amb una ona plana igual a la de referència utilitzada en la construcció, amb una direcció de propagació tal que formi un angle θ amb l'eix (figura 4). La difracció d'aquesta ona sobre l'holograma dóna lloc a tres ones emergents: una ona esfèrica que convergeix en eix a distància f' , una ona esfèrica divergent, que té un focus virtual a distància $-f'$, i una ona plana que correspon a la propagació directa de l'ona de referència. De l'existència d'una ona que focalitza a una distància f' quan l'holograma és il·luminat amb una ona plana, podem deduir que el conjunt equival a una lent convencional. La figura 5 mostra l'aspecte d'una lent hologràfica d'1 m de focal.

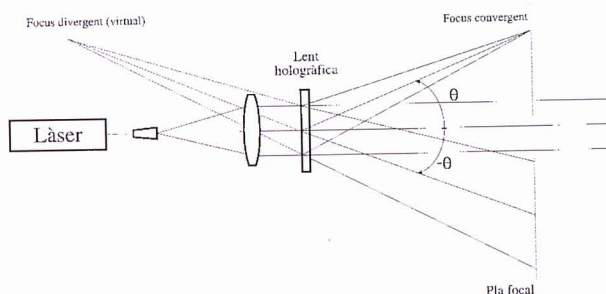


Figura 4: Fronts d'ona emergents d'una lent hologràfica

Hi ha una diferència important entre aquestes lents i les convencionals: quan una lent normal s'il·lumina en eix amb una ona plana, aquesta convergeix cap al seu focus, mentre que per obtenir una ona esfèrica convergent al focus amb una lent hologràfica hem d'il·luminar-la amb una ona que formi un angle θ amb l'eix. Noteu que no fóra vàlid construir la lent amb un angle $\theta = 0$ ja que, en il·luminar-la, emergirien les tres ones en la mateixa direcció, la qual cosa faria inviable la seva utilització.

Encara hi ha una altra diferència entre les lents difractives i les convencionals tal com les hem descrit: una lent refractiva és completament transparent mentre que la lent hologràfica, tal com s'observa a la figura 5, té zones més o menys fosques, una transmissió més petita que 1 i, per tant, és òpticament poc eficient. Aquest problema es resol aplicant a l'holograma ja revelat un procés químic per tal de fer-lo transparent. Aquest procés, anomenat *blanqueig*, consisteix a arrencar químicament la plata ennegrida (que dóna les diferents tonalitats de gris) i convertir les variacions de gris en variacions de gruix, és a dir, convertir les variacions d'amplitud en variacions de fase.

Les lents hologràfiques tenen avantatges destacables: i) no pateixen de les aberracions geomètriques inherents a les lents de vidre, tot i que n'estan exemptes, ii) és

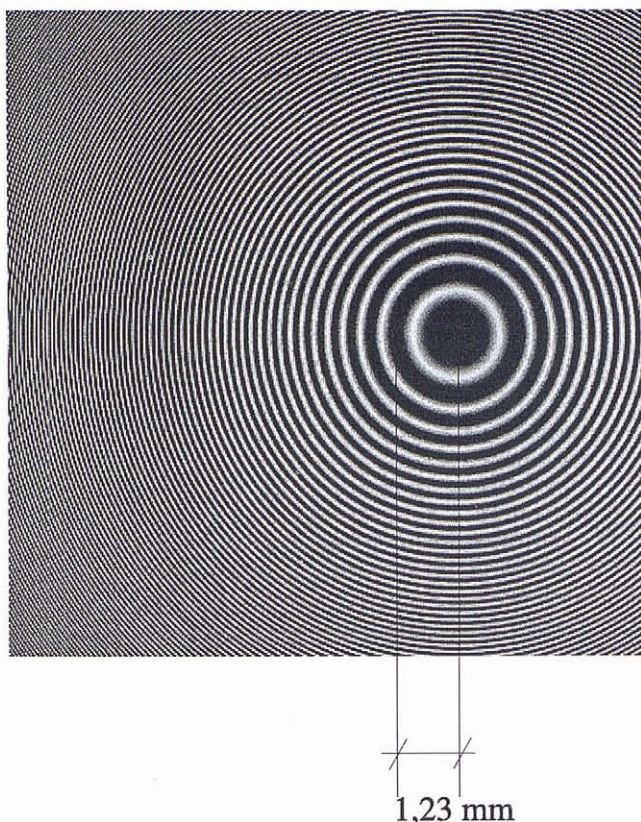


Figura 5: Lent hologràfica

possible ajustar la focal al valor que es desitgi, iii) són compactes i la seva mida és reduïda i iv) són relativament fàcils de fer en un laboratori d'òptica.

Correlació òptica i detecció d'imatges

Aprofitant les propietats de la difracció, una de les possibles aplicacions que es poden realitzar consisteix en la detecció d'imatges per correlació. La detecció o reconeixement d'imatges és un camp de gran interès dins d'àmbits com la visió artificial, la robòtica o el control de qualitat en cadenes de producció. La seva finalitat és determinar de manera automàtica si un objecte o motiu concret és present dins d'una escena i, en cas afirmatiu, dir quina és la seva posició.

La correlació entre dues funcions bidimensionals $f(x, y)$ i $g(x, y)$ és un producte integral definit com

$$(f \otimes g)(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) g^*(x - x', y - y') dx dy \quad (3)$$

on el símbol $*$ expressa la funció complexa conjugada. Si la funció $g(x, y)$ és real, el fet de conjugar-la no afecta per a res.

Per a funcions reals, la correlació es pot entendre com una manera de comparar la funció $f(x, y)$ amb la funció $g(x, y)$ desplaçada a la posició (x', y') . Així, $f \otimes g$ adquireix un màxim absolut per a aquell valor de (x', y')

que fa que f i g siguin el més semblants possible. Aquesta propietat és la que més ens interessa per fer reconeixement d'imatges. Per relacionar el concepte d'imatge amb el de funció de dues dimensions, cal considerar el següent: una imatge en blanc i negre té una gradació de tons de gris; les zones més clares correspondran a valors de $f(x, y)$ més grans, mentre que al negre se li assigna el valor zero. Com que els valors físics de la transmissió estan definits entre 0 i 1, les funcions que descriuen imatges també estan acotades a l'interval $[0, 1]$.

Si pensem en $g(x, y)$ com la funció que descriu una escena formada per molts objectes i en $f(x, y)$ com la funció referent al motiu que volem detectar dins l'escena, en calcular $(f \otimes g)(x', y')$ obtindrem els valors de la correlació en el pla, amb un màxim en la posició on es trobi el motiu a detectar. Si el motiu no és present a l'escena, la correlació no presenta valors destacats a cap punt.

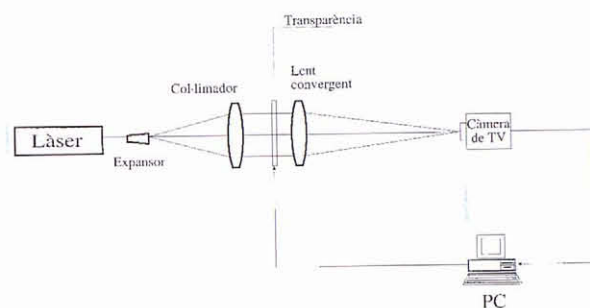


Figura 6: Esquema del correlador de transformades conjuntes

Realització experimental

Correlador de transformades conjuntes

A continuació veurem com es pot calcular físicament $f \otimes g$ mitjançant un sistema òptic. El correlador de transformades conjuntes (*joint transform correlator*) (figura 6) és un dispositiu òptic coherent que es basa en un muntatge com el descrit a la figura 2. Escena i referència s'introdueixen en un difractòmetre, davant de la lent convergent mitjançant una transparència fotogràfica. La referència o filtre (f) se centra a $x = a$ mentre que l'escena (g) se centra a $x = -a$. Al pla focal imatge de la lent tenim un detector, que en general és una càmera de vídeo connectada a un ordinador dotat d'una targeta digitalitzadora. Aquest sistema enregistra una distribució de llum que rep el nom d'espectre de potència conjunt (*joint power spectrum*) que es pot descriure a partir de l'equació (3)

$$I\left(\frac{x'}{\lambda f'}, \frac{y'}{\lambda f'}\right) \propto |TF_{\lambda f'}[f(x - a, y) + g(x + a, y)]|^2 \quad (4)$$

Per tant, amb l'ordinador hem enregistrat la difracció conjunta que fan escena i referència. Per obtenir la correlació $f \otimes g$ cal fer de nou el mateix procés. La imatge digitalitzada de l'espectre de potència conjunt és captada per la càmera i es reintrodueix en el difractòmetre. La nova distribució de llum que s'obté porta informació de la correlació entre les dues imatges. Es pot demostrar (Juvells et al., 1991) que la intensitat enregistrada es pot descriure matemàticament com:

$$\left| TF_{\lambda f'} \left[I \left(\frac{x'}{\lambda f'}, \frac{y'}{\lambda f'} \right) \right] \right|^2 = |(f \otimes f + g \otimes g)(x, y) + (f \otimes g)(x - 2a, y) + (g \otimes f)(x + 2a, y)|^2. \quad (5)$$

El primer terme està centrat i és negligible, mentre que els altres dos estan centrats als punts $x = 2a$ i $x = -2a$. Aquests darrers són simètrics i aporten la informació rellevant de la correlació encreuada entre l'escena i la referència.

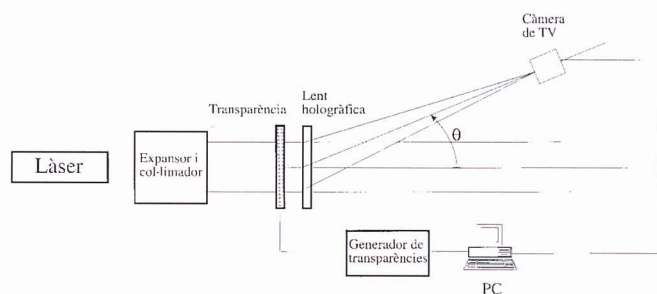


Figura 7: Correlador de transformades conjuntes utilitzat

Realització òptica

La figura 7 mostra el correlador experimental que s'ha fet servir en aquest treball. Escena i referència s'introdueixen al correlador que és il·luminat amb un làser de He-Ne de $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ i 5 mW de potència. La lent hologràfica focalitza sobre el seu pla focal l'espectre de potència conjunt, que és enregistrat per una càmera de vídeo i convertit en un fitxer informàtic mitjançant una targeta digitalitzadora. L'ordinador envia aquesta informació a un generador de transparències. Aquest llegeix un arxiu de gràfics i genera una transparència fotogràfica (diapositiva). Un cop obtinguda la imatge de l'espectre de potència conjunt es reintrodueix en el difractòmetre per realitzar la segona fase del reconeixement. L'espectre de potència conjunt és il·luminat i la seva difracció de Fraunhofer correspon en aquest cas a la correlació descrita a l'equació 5. El terme central $f \otimes f + g \otimes g$ no aporta informació, encara que emmagatzema quasi tota l'energia. D'altra banda, els dos termes laterals simètrics $f \otimes g$ són els que cal analitzar amb atenció.

Per fer la realització pràctica s'ha fet servir una escena $g(x, y)$ (figura 8) formada per tres satèl·lits $s_1(x, y)$,

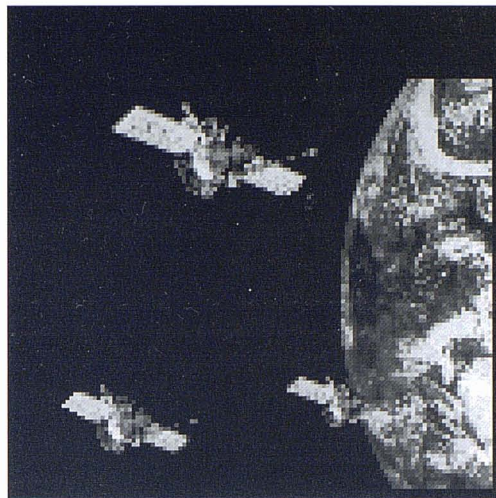


Figura 8: Escena utilitzada en els experiments

$s_2(x, y)$ i $s_3(x, y)$ i la Terra ($b(x, y)$), situats als punts de coordenades (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) i (x_b, y_b) ,

$$g(x, y) = s_1(x - x_1, y - y_1) + s_2(x - x_2, y - y_2) + s_3(x - x_3, y - y_3) + b(x - x_b, y - y_b) \quad (6)$$

mentre que l'objecte a detectar és el satèl·lit més gran s_1 , centrat al punt de coordenades (x_f, y_f) , és a dir $f(x, y) = s_1(x - x_f, y - y_f)$. Els termes laterals $f \otimes g$ poden ser descrits per

$$f \otimes g = s_1 \otimes s_1 + s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes s_3 + s_1 \otimes b. \quad (7)$$



Figura 9: Detall del terme de correlació encreuada. Observeu la detecció del satèl·lit gran

Com que la correlació de valor màxim serà $s_1 \otimes s_1$, la detecció queda assegurada. Aquest resultat es pot constatar a la figura 9 on hi ha un màxim de llum a la posició

del satèl·lit gran. Això també es pot veure gràficament a la representació tridimensional presentada a la figura 10.

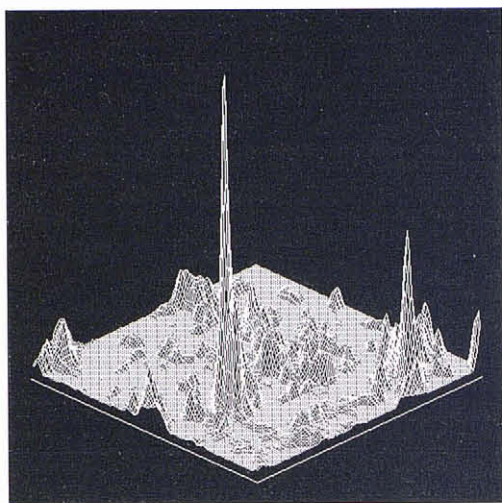


Figura 10: Representació tridimensional de la figura 9



Figura 11: Detall del terme de correlació encreuada. Observeu la detecció del satèl·lit mitjà

S'ha realitzat un segon experiment en el qual es detecta el satèl·lit mitjà. A la figura 11 es mostra el detall de la correlació encreuada $f \otimes g$ i a la figura 12 es fa la representació en tres dimensions de la figura anterior. En els dos casos analitzats, s'observa una clara detecció del satèl·lit en qüestió.

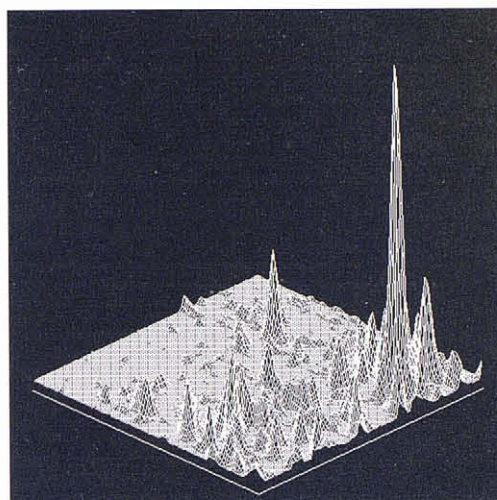


Figura 12: Representació tridimensional de la figura 11

Conclusions

S'ha mostrat la possibilitat de construir un sistema experimental de detecció d'imatges per correlació òptica en el qual les lents convencionals han estat substituïdes per lents hologràfiques o difractives. Els resultats del reconeixement que s'han obtingut són prou satisfactoris i mostren la viabilitat de dur a la pràctica sistemes que incloguin moduladors òptics en temps real per eliminar el procés fotogràfic intermedi. Això permetrà en un futur proper comptar amb sistemes més lleugers (Yu et al., 1992).

Agraïments

Aquest treball ha estat parcialment finançat per la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología, projecte núm. TAP94-0303.

Referències

- GOODMAN, J. W., *Introduction to Fourier Optics*, Mc Graw Hill, (New York, 1968).
 JUVELLS, I., CARNICER, A. i VALLMITJANA, S., Reconeixement d'imatges, *Revista de Física*, **1**, 19-26 (1991).
 YU, F. T. S. i JUTAMULIA, S., *Optical Signal Processing. Computing and Neural Networks*, John Wiley & Sons, (New York, 1992).